www.revistageintec.net
ISSN: 2237-0722
revista GEINTEC
Gestão, Inovação e Tecnologias

PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA PARA O PROBLEMA DE CORTE UNIDIMENSIONAL DE ESTOQUE COM REAPROVEITAMENTO DOS RESÍDUOS

INTEGER LINEAR PROGRAMMING FOR THE ONE-DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEM WITH WASTE REUSE

Valdecy Pereira; Helder Costa Gomes[2]
[1]Universidade Federal Fluminense – UFF – Niterói/RJ – Brasil
valdecy.pereira@yahoo.com.br
[2]Universidade Federal Fluminense – UFF – Niterói/RJ – Brasil
hgc@vm.uff.br

Resumo

Neste trabalho, é apresentada uma modelagem linear e inteira para resolver o problema de corte unidimensional. A modelagem proposta tem como objetivo, concentrar os resíduos provenientes dos cortes em uma única barra fazendo com que as demais sejam aproveitadas ao máximo, a barra que concentrará os resíduos também poderá ser utilizada em uma próxima rodada de cortes. O trabalho detalha a modelagem feita através de exemplos numéricos adaptados da literatura e o tempo computacional para a resolução do modelo foi considerado razoável.

Palavras-chave: corte unidimensional, programação Inteira, resíduos.

Abstract

In this work, we present a linear and integer model to solve the problem of one-dimensional cut. The proposed model main objective is to concentrate the waste of the cuts in a single bar causing the others to be fully exploited, the bar that concentrate the waste can also be used in a next round of cuts. The paper details the proposed modeling with the help of numerical examples adapted from literature, and the computational time for solving the model was considered reasonable.

Key-words: one-dimensional cut, Integer Programming, waste.

1. Introdução

O problema de corte unidimensional estudado por Gilmore & Gomory (1961) é um problema de programação inteira que envolve o atendimento de uma determinada demanda de um ou mais itens, de tamanhos variados, e todas essas demandas são frações de um item mestre denominado como barra. O número de frações pode ser gerado através de padrões de corte feitos nas barras até que a demanda seja totalmente atendida com o menor número possível barras gastas.

Esse tipo de problema possui muitos campos de aplicações como, problemas de corte em indústrias de papel, aço ou vidro, programação de propagandas com diferentes durações dentro de um intervalo comercial, em problemas de orçamento de capital, armazenagem de dados em discos rígidos, etc. (BERBERLER et al, 2010). Porém este problema é também conhecido por ser NP-difícil e por isso pode ser intratável para se obter soluções ótimas, em um tempo razoável, para problemas de médio e grande porte (YANASSE & LAMOSA, 2007).

Neste problema deseja-se minimizar o número de frações que não poderão ser utilizáveis para o atendimento da demanda especificada, por possuírem um tamanho menor do que o especificado para atender ao pedido de um determinado cliente, essas frações são denominadas como resíduos. Os resíduos surgem devido a aplicação de um determinado tipo de padrão de corte, e dependendo do tamanho da barra e das demandas requeridas o surgimento dos resíduos é inevitável.

O problema em questão foi classificado por Dyckhoff (1990); e o autor considera que a característica mais importante desse problema é a sua dimensão, pois esta determinará os tipos padrões de corte utilizados. Porém o autor ressalta que os padrões de corte podem ter restrições como, por exemplo, a distância máxima e/ou mínima das lâminas de corte, e também se poderão assumir infinitas combinações ou se estarão limitados a determinados tipos de padrões pré-especificados.

Dyckhoff (1990) classifica este problema como 1/V/I/R, onde “1” significa que o problema possui uma dimensão, “V” que as frações devem ser um subconjunto de barras e são geradas a partir de padrões de corte, “I” que todas as barras possuem um tamanho idêntico, e finalmente “R”, quer dizer que as frações podem ser de diferentes uma das outras.

Este trabalho tem como objetivo primário apresentar uma modelagem linear e inteira que tem como intuito reaproveitar resíduos advindos de padrões de cortes para um reaproveitamento futuro. Para que isso ocorra à fração gerada pelo padrão de corte, terá que ter um tamanho mínimo, tal qual, possa atender pelo menos parte de uma das demandas. O objetivo secundário deste trabalho é fazer com que o máximo de barras, seja utilizado sem que haja resíduos ou que estes resíduos sejam os menores possíveis.

Para atingir estes objetivos a modelagem em questão irá considerar que os tipos de padrões de corte não possuem qualquer tipo de restrições e também que esses padrões não são conhecidos a priori. Todos os padrões de corte sugeridos serão fruto da solução do problema. E o tempo de espera para se achar as soluções ótimas foi considerado razoável. Vale notar que o tempo poderá variar de acordo com o *hardware* utilizado.

Na seção 1 foi apresentada uma breve descrição do problema, sua classificação e também os objetivos do trabalho proposto. Na seção 2, será apresentada uma revisão da literatura envolvendo heurísticas e diferentes modelagens para a resolução do problema de corte especificado e suas variações. Na seção 3, será apresentada a formulação matemática clássica e a formulação proposta para o reaproveitamento dos resíduos, juntamente com considerações sobre como desenvolver o número de restrições e as adaptações da função objetivo. Exemplos numéricos são dados como forma de esclarecer melhor a modelagem. O presente trabalho se encerra na seção 4, com conclusões sobre o modelo e a indicação de trabalhos futuros.

2. Revisão da literatura

O problema considerado por este estudo, como definido na seção anterior, é do tipo 1/V/I/R, na literatura recente podem ser encontrados vários métodos de resolução para este tipo problema (e suas variações) que utilizam como exemplos numéricos, tanto dados reais como dados gerados aleatoriamente. Os exemplos numéricos normalmente servem para que comparações sejam feitas entre as soluções dos autores e as soluções existentes na literatura do estado da arte, bem como comparar também o tempo computacional total que se levou para achar tais soluções.
Carvalho (1996) desenvolveu uma formulação para o problema, com uma estrutura que permite pela a utilização de um algoritmo próprio, achar em um tempo razoável a solução ótima do problema.

Yanasse & Lamosa (2007) propuseram um modelo linear e inteiro que leva em consideração a sequência de cortes feitos. Os padrões de cortes são conhecidos de antemão e as soluções geradas para problemas de médio porte são próximas do ótimo. Ambruster (2001) desenvolveu um modelo com o mesmo objetivo, porém os tipos de cortes são gerados pelo próprio modelo e soluções quase ótimas são encontradas. Schilling (2002) também desenvolveu modelo com o mesmo objetivo, porém os cortes e as soluções encontradas são ótimos

Antonio et al (1999) criaram um modelo de programação dinâmica para a resolução de problemas de grande porte através de dois métodos, o primeiro acha soluções em um tempo hábil as custas da qualidade das soluções e outro acha boas soluções as custas do tempo total necessário para se achar a solução. O primeiro método é utilizado pelo departamento de vendas de uma indústria e serve para informar ao cliente, em menos de um minuto, se o seu pedido poderá ser atendido. O segundo método é utilizado ao longo da noite para gerar soluções com menores custos para atender aos pedidos feitos pelos clientes e atendidos pelo departamento de vendas no dia anterior.

Moretti & Neto (2009) modelaram o problema de corte unidimensional através do uso de programação não linear, minimizando o número de barras utilizadas e o tempo de preparação das máquinas. As soluções encontradas foram melhores do que as soluções obtidas por outros métodos, porém o tempo computacional foi considerado uma desvantagem da sua modelagem.

Cerqueira & Yanasse (2010) introduziram uma heurística que produz soluções minimizando o número de padrões de cortes utilizados. Primeiro os pedidos são separados por grupos de acordo com as demandas, e dentre os padrões achados são aceitos aqueles que geram o menor número de resíduos, os autores ainda utilizam um redutor de padrões advindo da literatura para melhorar ainda mais as soluções.

Araujo et al (2008) resolvem o problema de corte através da utilização de algoritmos evolucionários, a vantagem destacada pelos autores sobre o modelo é que a função objetivo é bastante flexível podendo ser formulada para lidar com a minimização de resíduos, com a redução do número de padrões de corte ou com ambos ao mesmo tempo.

Sallaume et al (2010) apresentou um método híbrido de solução para o problema de corte, utilizando: heurísticas, programação linear inteira e mineração de dados. As soluções achadas pelo método possuem características que levam em conta o total de resíduos, o número de padrões de corte sem resíduos, o número de padrões de corte com resíduos, e o número total de barras utilizadas.

Alem et al (2008) consideram a demanda para o problema do corte como uma demanda estocástica e acham a solução do modelo através de 2 estágios. O primeiro estágio define o número de barras a serem cortados e o segundo estágio trata de possíveis entregas atrasadas ou custos de estocagem surgidos devido as soluções encontradas no estágio 1. A função objetivo em ambos os estágios é o de minimizar os resíduos e as entregas atrasadas ou custos de estocagem.

Cherri et al (2009) consideraram os resíduos gerados pelo problema do corte poderiam ser utilizados posteriormente, se fossem grandes o suficiente. Heurísticas clássicas foram modificadas para solucionar esse caso especial de corte e foi testado com problemas gerados aleatoriamente. Os autores não conseguiram identificar qual heurística modificada apresentou um melhor desempenho para achar soluções viáveis para o problema, mas as heurísticas não possuem um bom desempenho para problemas de grande porte, apesar de solucionarem problemas menores com muita rapidez.

3. Modelo matemático

O modelo matemático clássico criado por Gilmore & Gomory (1961) começa com uma lista de *n* pedidos e cada um requer uma determinada quantidade de q_j, $j = 1 ,..., m$ frações. Alguns padrões de corte são criados e esses padrões são associados com a variável inteira x_i que representa a quantidade de vezes que cada padrão de corte será utilizado. O modelo fica sendo então:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq q_j, \qquad \forall j = 1, \ldots, m$$

$$x_i \geq 0 \text{, e Inteiro}$$

Onde:

a_{ij}: É o número de vezes que o pedido *j*, aparece no padrão *i*;

c_i: É o custo do padrão *i*, quando este é igual a 1, ele minimiza o número de barras utilizadas;

x_i: Representa a quantidade de vezes que cada padrão de corte sera utilizado;

qj: Número de frações demandadas.

O modelo matemático proposto é uma adaptação do modelo de Jahromi et al (2011) e tem como premissas:

- Os padrões de corte utilizados não são conhecidos;
- Todas as barras possuem o mesmo comprimento;
- Existe um número suficiente de barras para atender qualquer demanda;
- Os resíduos, se existirem, devem estar concentrados de tal forma, que a barra, mesmo cortada possa ser reutilizada.

O modelo fica sendo então:

$$\text{Max } R \qquad (01)$$

s.a

$$\sum_{i}^{m} X_{ij}.F_i + R = C_i \quad i = 1, \dots, m \qquad (02)$$

$$\sum_{i}^{m} X_{ij}.F_i \leq C_i \quad i = 1, \dots, m \qquad (03)$$

$$\sum_{j}^{n} X_{ij} = D_{i_,} \; j = 1, \dots, n \qquad (04)$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ e Inteiro} \qquad (05)$$

Onde:

R: Resíduo total da primeira barra do problema;

X_{ij}: Variável inteira que representa os padrões de corte existente em cada barra;

F_i: Comprimento de cada fração;

C: Comprimento da barra, sendo todas do mesmo tamanho;

D_i: Demanda de cada fração;

A equação 01 representa a função objetivo que tem como meta maximizar o resíduo existente na primeira barra utilizada. A construção do problema permite afirmar que o maior resíduo utilizável só existirá nessa barra em questão, e as demais não terão resíduos ou apenas frações muito pequenas e não reutilizáveis. A equação 02 representa a barra contendo o excesso, a equação 03 as demais barras, a equação 04 é formulada para a demanda seja completamente satisfeita. Finalmente a equação 05 representa a integralidade dos padrões de corte.

O total de barras a serem utilizadas é representado pelo somatório das equações 02 e 03. Esse número é calculado em função da demanda de cada fração e do comprimento da barra, o número total de restrições fica então sendo segundo a equação 06:

$$Total\ de\ restrições = \frac{\sum D_i.F_i.}{C} \qquad (06)$$

Esse número deve ser arredondado para cima. Se condição de viabilidade, que será explicada a seguir, for verdadeira e se a equação 06 resultar em um número inteiro, então pode ser afirmado que esse problema não terá nenhum resíduo e todas as barras serão 100% aproveitadas.

A condição de viabilidade é necessária, pois indicará se o número total de barras utilizado é suficiente para atender a demanda, o teste é modelado da seguinte maneira:

$$\text{Min } R \qquad (07)$$

s.a

$$\sum_{i}^{m} X_{ij}.F_i + R = C_i \quad i = 1, \ldots, m \qquad (08)$$

$$X_{ij} \geq 1;\ j = 1, \ldots, n \qquad (09)$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ e Inteiro} \qquad (10)$$

A equação 07 representa a função objetivo que tem como meta minimizar o resíduo de uma única barra utilizada. Esse teste deverá ser feito, no máximo para cada um dos padrões de corte existente, ele indica se para determinada fração ou combinação de frações existe um padrão de corte que não deixa nenhum resíduo na barra. Se todos os testes forem positivos então a equação 06 poderá ser utilizada, se pelo menos um teste der negativo então o resultado da equação 06 deverá ser acrescido de um e então, se necessário arredondado para cima, a função objetivo deverá comtemplar o excesso das duas primeiras barras.

3. 1 Exemplo numérico

Serão apresentados exemplos numéricos da modelagem proposta, todos os exemplos foram resolvidos pelo Excel 2010 através do suplemento *freeware OpenSolver v.1.2* em um computador com o sistema operacional *Windows* 7 32 *bits* com 4Gb de memória DDR 3. O exemplo abaixo na tabela 1 foi adaptado de Schilling & Georgiadis (2002) e demonstra a eficiência da modelagem:

Tabela 1- Exemplo numérico

Tipo de frações (mm)	Demanda (unidades)	Tamanho das barras	1900 mm
330 mm	9		
360 mm	5		
385 mm	11		
415mm	12		

Fonte: Adaptado de Schilling & Georgiadis (2002)

Teste de viabilidade:

$$\text{Min } R$$

s.a

$$330.X_{11} + 360.X_{12} + 385.X_{13} + 415.X_{14} + \mathrm{R} = 1900$$

$$X_{12} \geq 1$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ e Inteiro}$$

Foi feito o teste para todos os padrões de corte, mas não é obrigatório fazê-lo para cada um deles. Os resultados na tabela 2 deixam esse fato mais evidente.

Tabela 2- Teste de viabilidade

Tipo de frações (mm)	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
330 mm	1		1	1
360 mm	0	1	0	0
385 mm	3	4	3	3
415mm	1		1	1
Resíduos	0	0	0	0

Fonte: Autoria própria (2011)

Com o teste de viabilidade foi verificado que todos os padrões gerados não produziram nenhum resíduo, demonstrando que a equação 06 e a função objetivo poderão ser utilizados sem nenhuma alteração. Os resultados também demonstram que o teste só precisaria ser feito para os padrões de corte X_{11} e X_{12}, pois foram os únicos que produziram dois tipos distintos de padrões de corte.

Pela equação 06 teremos:

$$Total = \frac{330.9 + 360.5 + 385.11 + 415.12}{1900} = \frac{13985}{1900} = 7{,}36 \quad \rightarrow 8$$

Serão necessárias 8 restrições para atender a demanda, ou seja 8 barras. Ainda será necessário adicionar as restrições descritas pela equação 04. A modelagem ficará sendo então:

Max R

s.a

$$330.X_{11} + 360.X_{12} + 385.X_{13} + 415.X_{14} + \mathrm{R} = 1900$$

$$330.X_{21} + 360.X_{22} + 385.X_{23} + 415.X_{24} \leq 1900$$

$$330.X_{31} + 360.X_{32} + 385.X_{33} + 415.X_{34} \leq 1900$$

$$330.X_{41} + 360.X_{42} + 385.X_{43} + 415.X_{44} \leq 1900$$

$$330.X_{51} + 360.X_{52} + 385.X_{53} + 415.X_{54} \leq 1900$$

$$330.X_{61} + 360.X_{62} + 385.X_{63} + 415.X_{64} \leq 1900$$

$$330.X_{71} + 360.X_{72} + 385.X_{73} + 415.X_{74} \leq 1900$$

$$330.X_{81} + 360.X_{82} + 385.X_{83} + 415.X_{84} \leq 1900$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} + X_{61} + X_{71} + X_{81} = 09$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} + X_{62} + X_{72} + X_{82} = 05$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} + X_{63} + X_{73} + X_{83} = 11$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} + X_{64} + X_{74} + X_{84} = 12$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ e Inteiro}$$

A solução do exemplo está na tabela 3, a seguir:

Tabela 3- Maximização do resíduo

Barras	Padrões de Corte				Resíduos
	330	360	385	415	
1	0	1	0	1	1125
2	1	0	3	1	0
3	1	2	0	2	20
4	2	0	1	2	25
5	1	0	3	1	0
6	2	0	1	2	25
7	1	0	3	1	0
8	1	2	0	2	20

Fonte: Autoria própria (2011)

Como pode ser observado o maior resíduo se encontra na barra 1, e pode então ser reaproveitada para usos posteriores. As barras 2, 5 e 7 foram 100% aproveitadas e as barras 3, 4, 6 e 8 tiveram a produção de resíduos que não poderão ser aproveitados para o atendimento dessa demanda específica.

Se este mesmo problema fosse modelado em função da minimização de resíduos, o seguinte resultado, apresentado na tabela 4, seria obtido:

Tabela 4- Minimização dos resíduos

Barras	Padrões de Corte				Resíduos
	330	360	385	415	
1	0	4	0	1	45
2	1	0	4	0	30
3	0	0	0	4	240
4	3	0	2	0	140
5	5	0	0	0	250
6	0	0	0	4	240
7	0	0	1	3	270
8	0	1	4	0	0

Fonte: Autoria própria (2011)

Como pode ser observado o maior resíduo se encontra na barra 7, e não pode ser reaproveitada para usos posteriores. Somente a barra 8 foi 100% aproveitada e as barras 1, 2, 3, 4, 5 e 6 tiveram a produção de resíduos que não poderão ser aproveitados para o atendimento dessa demanda específica.

Para problemas de grande porte foi testado o seguinte exemplo, adaptado de Suliman (2001)

Tabela 5- Exemplo numérico de grande porte

Tipo de frações (cm)	Demanda (unidades)	Tamanho das barras	130 cm
50 cm	7500		
40 cm	9061		
30 cm	11250		
20 cm	11253		

Fonte: Adaptado de Suliman (2001)

O problema possui 40.000 variáveis, 10.000 restrições de barras e 4 restrições de demanda. Nesse exemplo, todas as 10.000 barras foram 100% aproveitadas, e 9 padrões de corte foram gerados. Os padrões podem ser vistos na tabela 6.

Tabela 6- Resultados

Padrões de corte				Repetição dos padrões de corte
50	40	30	20	
1	2	0	0	2469
0	1	3	0	2187
2	0	1	0	2143
0	0	1	5	1443
0	2	1	1	967
1	0	0	4	744
0	0	3	2	45
0	1	1	3	1
1	1	0	2	1

Fonte: Autoria própria (2011)

A minimização dos resíduos foi ótima e o tempo computacional foi considerado razoável, levando cerca de 36 minutos para que a solução fosse encontrada.

4. Conclusão

Este trabalho apresentou uma modelagem linear e inteira para resolver o problema de corte unidimensional com reaproveitamento de resíduos. O problema foi formulado para que pelo menos uma barra fosse cortada de modo que boa parte do resíduo final fosse concentrado apenas nela, aumentando assim as chances do seu reaproveitamento. O modelo também tem como serventia a minimização do total de barras utilizadas e funciona bem para problemas de grande porte, com um tempo computacional razoável. Para estudos futuros pretende-se minimizar os tipos de padrões de corte gerados.

Referências

ALEM, D., J., MUNARI, P., A., ARENALES, M., N., E FERREIRA, P., A., V. On the cutting stock problem under stochastic demand, **Springer Science & Business Media**. 2008.

ANTONIO, J., CHAUVET, F., E PROTH, J., M. The cutting stock problem with mixed objectives: Two heuristics based on dynamic programming, **European Journal of Operational Research**, 114, 395-402. 1999

ARAÚJO S., A., CONSTANTINO, A., A., E POLDI, K., C. **An evolutionary algorithm for the one-dimensional cutting stock problem**, Eng Opt 2008 - International Conference on Engineering Optimization. 2008

ARMBRUSTER, M. A solution procedure for a pattern sequencing problem as part of a one-dimensional cutting stock problem in the steel industry, **European Journal of Operational Research**, 141, 328–340. 2001.

BERBERLER M., E., NURIYEV U., E YILDIRIM, A. A Software for the one-dimensional Cutting Stock Problem, *Journal of King Saud University*,23, 69-76. 2010.

CARVALHO, J., M**.** Solução exacta de problemas de corte unidimensional usando o método de partição e avaliação sucessivas e geração diferida de colunas, **Gestão e Produção**, 3, 33-48. 1996.

CERQUEIRA, G., R., L., E YANASSE, H., H. A pattern reduction procedure in a one dimensional cutting stock problem by grouping items according to their demands, **International Transactions in Operations Research**. 2010.

CHERRI A., C., ARENALES, M., N., YANASSE, H., H. The one-dimensional cutting stock problem with usable leftover – A heuristic approach, **European Journal of Operational Research**,1 96, 897–908. 2009.

DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems, **European Journal of Operational Research**, 44, 145-159. 1990

GILMORE, P. C. E GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. **Operations Research**, 9, 849-859. 1961.

JAHROMI, M., H., M., A., TAVAKKOLI-MOGHADDAM, R., GIVAKI, E., REZAPOUR-ZIBA, A. A Simulated Annealing Approach For A Standard One-Dimensional Cutting Stock Problem, **International Journal Of Academic Research**, 3. 2011

MORETTI, A., C., E NETO, L., L., S**.** Nonlinear cutting stock problem model to minimize the number of different patterns and objects, **Journal of Computational Interdisciplinary Sciences**, 1(2), 159-164. 2009

SALLAUME, S., MINE, M., T., SILVA, M., S., A., OCHI, L., S., E PLASTINO, A. One Dimensional Cutting Stock Problem with Redevelopment of the Surplus Material, **Annals of Operations Research**, 179, 169–186. 2010.

SCHILLING, G. E GEORGIADIS, M., C. An algorithm for the determination of optimal cutting patterns, **Computers & Operations Research**, 29, 1041-1058. 2002.

SULIMAN, S., M., A. Pattern generating procedure for the cutting stock problem, **International Journal Production Economics**, 74, 293-301. 2001.

YANASSE, H., H. E LAMOSA, P. An integrated cutting stock and sequencing problem, **European Journal of Operational Research**, 183, 1353-1370. 2007.